

# Algoritmo para a simulação computacional da colisão tridimensional de dois corpos

André C. Silva<sup>1</sup>, Américo T. Bernardes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia de Minas – Universidade Federal de Goiás (UFG)  
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 – 75704-020 – Catalão – GO – Brasil

<sup>2</sup> Departamento de Física – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Campus Morro do Cruzeiro – Ouro Preto – MG – Brasil

andre@iceb.ufop.br, atb@iceb.ufop.br

**Abstract.** *The granular media, such as sand, powders e grains, show very interesting behavior. Many of these phenomenons can not be study by fluid dynamics or by continuum mechanics methods. So the treatment of these systems must be done by computer simulation methods. However, simulations of this kind follow in the non trivial problem of the three-dimensional collisions. The present work shows the mathematical treatment used in the simulation of the three-dimensional collision between two bodies, as well as the algorithm used by that. The founded results agree with the physics expected results.*

**Resumo.** *Os meios granulares, como areia, pós e grãos, apresentam comportamentos bastante interessantes. Muitos destes fenômenos não podem ser tratados nem pelos métodos da dinâmica dos fluidos e muito menos por métodos da mecânica do contínuo, sendo estes sistemas muito longe do equilíbrio termodinâmico. Assim sendo, o tratamento destes sistemas deve ser adequadamente feito através dos métodos de simulação computacional. Contudo, em simulações deste tipo recai-se no problema não trivial da colisão tridimensional entre dois corpos. O presente trabalho apresenta o equacionamento matemático utilizado na simulação de colisões tridimensionais entre dois corpos, bem como o algoritmo usado para tal.*

## 1. Introdução

Sempre que se deseja simular o movimento de um sistema granular tem-se que tratar as colisões entre dois corpos. Livros de física de nível superior apresentam modelos básicos de colisões, sempre focando casos particulares, tais como colisões em uma dimensão ou duas dimensões onde a colisão é perfeitamente elástica. Contudo, em um caso real como o desejado, tais simplificações não são possíveis e levam a erros grosseiros na simulação. Desta forma pretende-se apresentar um equacionamento matemático para tratar a colisão tridimensional de partículas granulares.

Este equacionamento poderá ser usado em simuladores de sistemas granulares. Várias técnicas computacionais têm sido usadas para retratar sistemas granulares. Grande atenção tem sido dada à dinâmica molecular e aos autômatos celulares. Dippel e

Wolf (1999) usaram dinâmica molecular para simular o descarregamento de grãos em silos. Já os autores Kohring et al (1995), Kozicki e Tejchman (2005) e Silva e Bernardes (2010) usaram autômatos celulares para modelar o mesmo problema.

O equacionamento apresentado no presente trabalho foi proposto inicialmente por Smid (2007) e se mostra de acordo com o esperado fisicamente. A implementação de tal equacionamento foi feita usando-se o ambiente de desenvolvimento Borland Delphi 7 e OpenGL para a visualização da simulação.

## 2. Colisões elásticas e inelásticas

A colisão entre dois corpos pode ser de dois tipos: elástica ou inelástica. Uma colisão elástica é caracterizada pela conservação da energia do sistema (cinética e potencial), assim sendo a energia do sistema antes da colisão tem o mesmo valor da energia ao final da colisão. No entanto, no decorrer da colisão, no tempo de contato, ocorre troca de energia (cinética e potencial) entre os corpos.

Na fase da deformação a energia cinética é transformada em potencial, não ocorrendo com isso perda de energia (como por exemplo: efeito joule, som e outros tipos de energia dissipativa), isto devido à perfeita deformação do material. Como conseguinte, a volta à forma inicial do material permite que a energia potencial armazenada seja transformada em energia cinética. Mesmo variando a energia cinética e potencial a energia mecânica do sistema permanece inalterada.

Durante o tempo de impacto (ou de contato) a energia cinética é transformada parcialmente em energia potencial, que será armazenada, e também dissipada. Devido ao fato da colisão não ser elástica, parte da energia é utilizada nas deformações permanentes do material. No entanto o momento linear é conservado. Em suma na colisão inelástica a energia inicial do sistema é maior que a energia final do sistema. Na colisão inelástica, ou parcialmente elástica, o coeficiente de restituição do material está compreendido no intervalo entre 0 e 1, da seguinte forma:

$$0 \leq e < 1$$

Quando o coeficiente de restituição ( $e$ ) é próximo de 1 (um) implica pouca dissipação de energia. Para o caso em que este for igual a 0 (zero) ocorrerá a máxima perda de energia cinética. Chamamos este caso de colisão perfeitamente inelástica ou anelástica. A equação do momento linear de uma colisão inelástica é dada por:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Onde  $p_i$  é o momento linear inicial e  $p_f$  o final. Para dois corpos colidindo em uma dimensão tem-se que:

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2} \quad (\text{equação do momento linear})$$

Onde:

$m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos 1 e 2, respectivamente;

$v_{i1}$  e  $v_{i2}$  são as velocidades iniciais dos corpos 1 e 2, respectivamente e

$v_{f1}$  e  $v_{f2}$  são as velocidades finais dos corpos 1 e 2, respectivamente. Para colisões de dois corpos em duas dimensões podemos escrever a velocidade dos corpos após a colisão com:

$$v_{1f} = \frac{v_{1i} \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} + \frac{v_{2i} \cdot 2m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{v_{1i} \cdot 2m_1}{m_1 + m_2} + \frac{v_{2i} \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

### 3. Colisões em três dimensões

A colisão em três dimensões pode ser tratada de forma análoga à colisão em duas dimensões. Contudo, devido à adição de mais uma dimensão existirão agora dois ângulos necessários para a determinação do vetor velocidade do segundo corpo após a colisão.

É conveniente representar tais ângulos em coordenadas polares e, assim sendo, as componentes  $x$  e  $y$  deste vetor podem ser expressas em termos da componente  $z$  e destes ângulos. Assim sendo, as equações da conservação do momento e da energia podem ser escritas como:

$$m_1 v_{z,1} = m_1 v_{z,1'} + m_2 \cdot \Delta v_{z,2'} \quad (1)$$

$$m_1 v_{x,1} = m_1 v_{x,1'} + m_2 \cdot \Delta v_{z,2'} \cdot \tan(\theta) \cdot \cos(\varphi) \quad (2)$$

$$m_1 v_{y,1} = m_1 v_{y,1'} + m_2 \cdot \Delta v_{z,2'} \cdot \tan(\theta) \cdot \sin(\varphi) \quad (3)$$

$$\frac{m_1}{2(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{z,1}^2)} = \frac{m_1}{2(v_{x,1'}^2 + v_{y,1'}^2 + v_{z,1'}^2)} + \frac{m_2}{\Delta v_{z,2'}^2 \cdot (1 + \tan^2(\theta))} \quad (4)$$

Pode-se assumir que o corpo dois esteja em repouso, isto é  $v_{x,2} = 0$ ,  $v_{y,2} = 0$  e  $v_{z,2} = 0$ , e  $v_{x,2'} = \Delta v_{x,2'}$ . Tal hipótese não afetará o resultado final do equacionamento uma vez que esta hipótese será descartada posteriormente pelo referenciamento explícito à velocidade do corpo dois. Resolvendo a equação (1) para  $v_{z,1'}$ , a equação (2) para  $v_{x,1'}$  e a equação (3) para  $v_{y,1'}$  temos:

$$v_{z,1'} = v_{z,1} - \frac{m_2 \cdot \Delta v_{z,2'}}{m_1} \quad (5)$$

$$v_{x,1'} = v_{x,1} - \frac{m_2 \cdot \Delta v_{z,2'} \cdot \tan(\theta) \cdot \cos(\varphi)}{m_1} \quad (6)$$

$$v_{y,1'} = v_{y,1} - \frac{m_2 \cdot \Delta v_{z,2'} \cdot \tan(\theta) \cdot \sin(\varphi)}{m_1} \quad (7)$$

Inserindo as equações (5), (6) e (7) na equação (4) resulta em uma equação quadrática para  $\Delta v_{z,2'}$  a qual, após manipulações algébricas, resulta na solução:

$$v_{z,2'} = \frac{2[v_{z,1} + \tan(\theta) \cdot (\cos(\varphi) \cdot v_{x,1} + \sin(\varphi) \cdot v_{y,1})]}{\left[ (1 + \tan^2(\theta)) \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right]} \quad (8)$$

Pode-se calcular agora as componentes da velocidade após a colisão usando as equações 1 – 3 e 5 – 7, assim sendo:

$$v_{z,2'} = v_{z,2} + \Delta v_{z,2'} \quad (9)$$

$$v_{x,2'} = v_{x,2} + \tan(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \Delta v_{z,2'} \quad (10)$$

$$v_{y,2'} = v_{y,2} + \tan(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \Delta v_{z,2'} \quad (11)$$

$$v_{z,1'} = v_{z,1} - \frac{m_2 \cdot \Delta v_{z,2'}}{m_1} \quad (12)$$

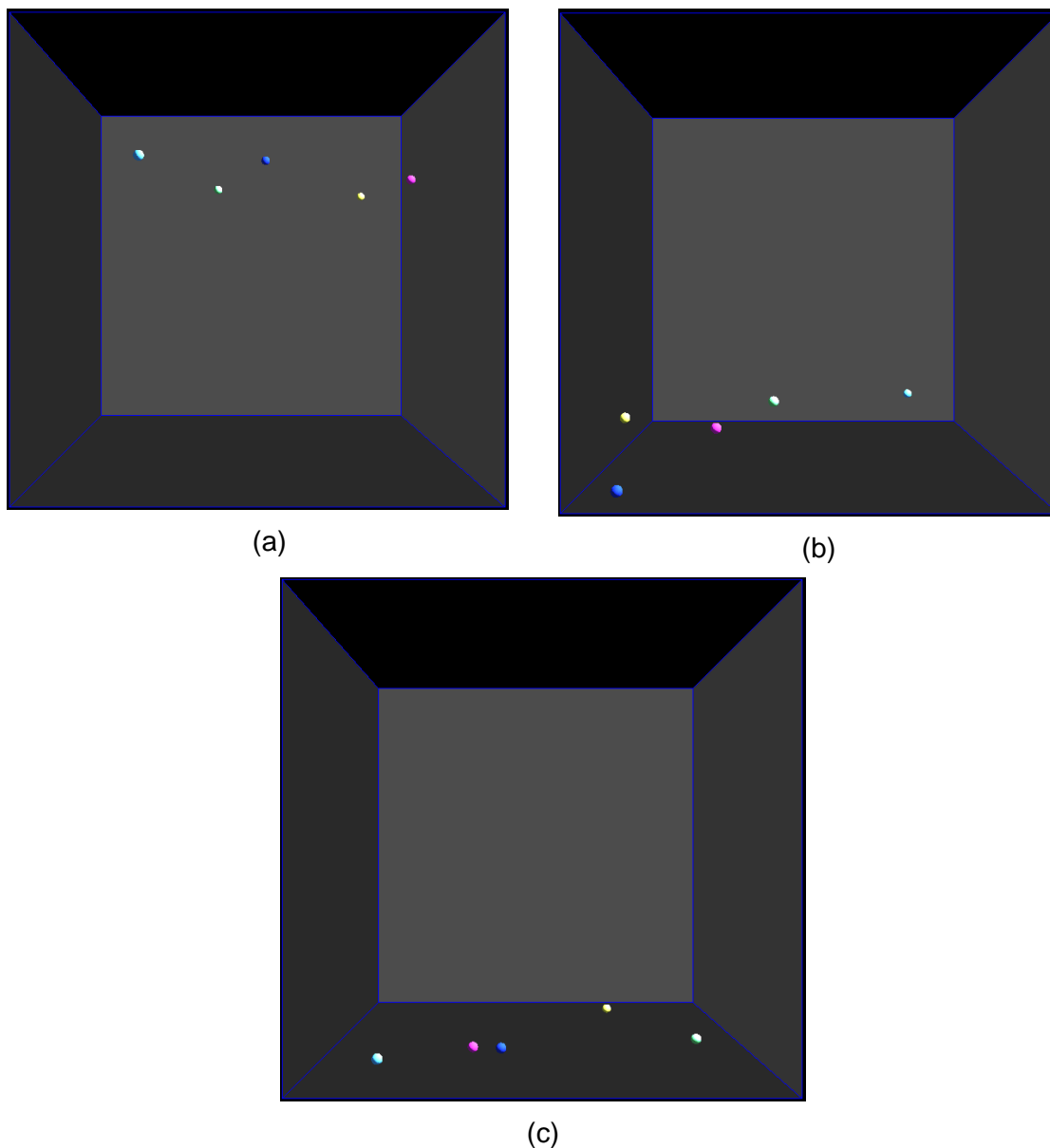
$$v_{x,1'} = v_{x,1} - \left( \frac{m_2}{m_1} \right) \tan(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \Delta v_{z,2'} \quad (13)$$

$$v_{y,1'} = v_{y,1} - \left( \frac{m_2}{m_1} \right) \tan(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \Delta v_{z,2'} \quad (14)$$

#### 4. Resultados

Usando as equações 1 a 14 foi implementado um programa em *Borland Delphi 7* para simular a colisão tridimensional entre dois corpos. Para a visualização dos resultados foi criada uma janela usando a linguagem *OpenGL* de forma que fosse possível visualizar em tempo real a simulação.

A figura 1 apresenta três telas do programa de simulação que, a grosso modo, consiste em uma caixa cúbica onde os corpos em forma de esferas se encontram confinados. No instante inicial as esferas são lançadas do topo da caixa. Estas possuem, ainda além, componentes  $x$  e  $y$  em sua velocidade. Assim sendo, a queda das esferas não é vertical.



**Figura 1. Três momentos diferentes da simulação da queda livre de cinco esferas. (a) as cinco esferas são lançadas do topo da caixa, possuindo velocidade em  $x$ ,  $y$  e  $z$ . (b) momentos depois as esferas já se chocaram entre si, com as paredes laterais e com o chão e (c) esferas em repouso.**

Nota-se na figura 1 que as esferas, por estarem submetidas à gravidade, tem movimento descendente e, devido ao fato de perderem energia, a altura que estas chegam após cada colisão com o chão diminui com o passar do tempo. No final da simulação as esferas ficam rolando no chão. Contudo, neste instante as colisões entre elas ainda existem, mesmo que agora em duas dimensões, e são tratadas pelas mesmas equações que nas colisões fora do plano da base da caixa.

A colisão ocorre no momento em que a distância entre dois centros for igual à soma dos raios das duas esferas que se chocaram. Se em uma dada iteração a distância

entre dois centros for menor que a soma dos raios deve-se voltar no tempo da simulação e calcular o instante de tempo em que a colisão realmente ocorreu. Após esta etapa calcula-se as novas velocidades das esferas e retorna-se o tempo da simulação. Se este passo não for observado singularidades como duas esferas interpenetrando-se (e não mais se “desgrudando”) ocorreram durante a simulação.

Para o controle do tempo de simulação é solicitado um dado de entrada, de modo que o usuário possa ter maior controle sobre o passo desejado. Contudo, é importante que tais simuladores usem passos de tempo adaptativos, de modo que em nenhuma iteração o incremento na posição de uma esfera será suficientemente grande para que ela interpenetre outra esfera ou extrapole os limites da caixa. Assim sendo, pode-se calcular o  $\Delta t$  de modo que a velocidade das esferas atenda uma determinada tolerância (dado de entrada) ou nunca seja superior à unidade de comprimento.

Uma vez que as esferas podem ser implementadas usando-se um vetor (no software desenvolvido optou-se por criar uma classe para descrever as esferas e outra para o sistema de esferas como um todo) a pilha de eventos a serem processados acaba sendo o próprio vetor, de modo que percorre-se o vetor alterando as posições das esferas e verificando se houve alguma colisão. Uma maneira de melhorar a performance de simulador é implementar o conceito de células, onde as colisões são avaliadas apenas entre esferas de uma mesma célula.

## 5. Conclusões

O algoritmo apresentado para cálculo das velocidades após uma colisão considerando esta ocorrendo em três dimensões se mostra fisicamente correto e plausível. Simulações com mais de quinhentas esferas usando uma interface em tempo real com o *OpenGL* se mostram ineficientes para computadores de pequeno porte, pois se consome muito tempo computacional para a geração da interface gráfica.

Como o modelamento abordado no presente trabalho pode ser usado em jogos eletrônicos, este se mostra utilizável, uma vez que não é provável que um jogo necessite controlar o movimento de várias centenas de esferas simultaneamente.

## Referências

Allen M. P., Tildesley, D. J. “Computer Simulation of Liquids”. New York: Oxford University Press, 1987. 408 p.

Dippel, S., Wolf, D. E. Molecular dynamics simulations of granular chute flow. Computer Physics Communications, Elsevier, n. 122, p. 284-289, 1999.

Herrmann, H. J. “Simulating granular media on the computer”, In: 3rd Granada Lectures in Computational Physics, Garrido & Marro (Springer Heidelberg, 1995), p. 67.

Herrmann, H. J. and Luding, S. “Modeling Granular Media on the Computer”. In: Continuum Mechanics and Thermodynamics, 1998.

Herrmann, H. J. “Computer simulations of granular media”. Bideau & Hansen, 1993.

Kohring, G. A., Melin, S., Puhl, H., Tillemans, H. J., Vermöhlen, W. Computer simulations of critical, non-stationary granular flow through a hopper. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 124, p. 273-28, 1995.

Kozicki, J., Tejchman, J. Simulations of flow patterns in silos with a cellular automaton: part 1. TASK Quarterly, v. 9, n. 1, p. 81–102, 2005.

Kozicki, J., Tejchman, J. Simulations of flow patterns in silos with a cellular automaton: part 2. TASK Quarterly, v. 9, n. 1, p. 103–114, 2005.

Silva, A. C., Bernardes, A. T. “Simulação computacional do escoamento de grãos em silos”. Exacta, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 157-165, 2010.

Smid, T. (2007) “Elastic and Inelastic Collision in Three Dimensions”, <http://www.plasmaphysics.org.uk/collision3d.htm>, Julho.

Rapaport, D. C. “The Art of Molecular Dynamics Simulation”. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 564 p.