

Simulação e Modelagem de Processos Ecológicos usando Redes de Petri Predicado Transição Diferencial

Laísa Bárbara Vaz Rodovalho¹, Liliane do Nascimento Vale¹

¹Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão. CEP 75704-020. Catalão – GO – Brasil

laisabarbara@gmail.com, lili_malman@yahoo.com.br

Abstract. *This paper describes the computational model of the life cycle of the dengue mosquito through the differential predicate transition Petri nets, which are capable of modeling and simulating population dynamics of the mosquito life stages. The modeling considers differential equations, the rates of metamorphosis between phases and natural mortality rates. The formalism of the Petri nets is based on a visual representation, facilitating the understanding of the processes and allowing both qualitative and quantitative analysis in the behavior of ecological processes. Finally, to validate the model is presented the model simulation using the software Maple.*

Resumo. *Este artigo descreve um modelo computacional do ciclo de vida do mosquito *Aedes aegypti* através da rede de Petri Predicado Transição Diferencial, a qual é capaz de realizar a modelagem e simulação da dinâmica de população dos estágios de vida do mosquito. O modelo utiliza equações diferenciais, levando em conta as taxas de metamorfose entre as fases e taxas de mortalidade naturais. O formalismo das redes de Petri é baseado em uma representação visual, facilitando a compreensão dos processos e permitindo análises tanto qualitativas quanto quantitativas no comportamento de processos ecológicos. Por fim, para a validação do modelo é apresentada sua simulação usando o software Maple.*

1. Introdução

O uso de modelos computacionais para simulação da dinâmica populacional e dispersão do vetor do vírus Dengue, o *Aedes aegypti*, tem sido a motivação de muitos estudos, sendo de grande importância para a Saúde Pública, uma vez que possibilita analisar a forma de transmissão e evolução da dengue.

Poucos modelos para o estudo da Dengue tinham sido elaborados até a década de 80. Atualmente, importantes trabalhos foram publicados, considerando tanto variáveis externas como temperatura, umidade, pluviosidade [Watts et al. 1987; Schreiber 2001; Ferreira e Yang 2003], como variáveis relacionadas ao vetor e ao hospedeiro [Smith et al. 2004; Coutinho et al. 2004]. Todas as variáveis citadas são importantes, mas considerá-las em um único modelo implicaria em um significativo aumento de complexidade do modelo sem garantir um ganho de desempenho, além de dificultar as análises dos resultados [Hestenes 1987]. Portanto, a ideia é integrar os principais modelos já elaborados e realizar a análise de sensibilidade para uma melhor compreensão dos submodelos componentes.

Considerando que as taxas de desenvolvimento do *Aedes aegypti* dependem da temperatura – modelo de Ferreira e Yang (2003) – é possível analisar como a dinâmica das populações é afetada por mudanças climáticas. Usar modelos computacionais para simulação da ecologia do *Aedes aegypti* permite representar a complexidade dos fenômenos em estudo e avaliar diferentes estratégias de intervenção em epidemias [Tran e Raffy 2005].

Lana (2006) apresentou um modelo matemático para representar o comportamento do mosquito em suas fases, levando em conta a temperatura do ambiente e os controles químicos. Porém, a validação de tal modelo não foi definida, além de não representar de forma completa as transições da evolução do mosquito, pois o uso das equações diferenciais ordinárias é considerado modelo contínuo e, portanto, não tratam de eventos discretos que existem em vários processos ecológicos, como na metamorfose do vetor da dengue.

Tomiyaama (2007) propôs uma abordagem baseada em modelos híbridos para o estudo de processos ecológicos. Foram modelados três estudos de casos através das Redes de Petri Predicado Transição Diferencial e os resultados obtidos com as simulações forneceram bases para análises quantitativas dos modelos construídos, validando as redes de Petri Predicado Transição Diferenciais na modelagem de processos biológicos.

As redes de Petri possuem técnicas bem estabelecidas para a modelagem de sistemas concorrentes, atividades paralelas e assíncronas [Murata 1989]. Elas são simples e poderosas para expressar o conhecimento biológico, como na sinalização, simultaneidade, tempo não-determinístico, etc. São extensíveis e possuem visualização intuitiva.

Neste artigo, apresentamos a modelagem e simulação do ciclo de vida do *Aedes aegypti* utilizando redes de Petri Predicado Transição Diferencial. Estudamos a dinâmica de população dos estágios de vida do *Aedes aegypti* através de equações diferenciais, levando em conta as taxas de metamorfose entre as fases e as taxas de mortalidade naturais.

As redes de Petri Predicado Transição Diferencial trazem todo o formalismo existente nas diversas categorias das redes de Petri existentes, necessárias na representação de processos ecológicos, utilizando um sistema de equações diferenciais para representar a parte contínua dos processos. Para concretizar o formalismo, são apresentadas a modelagem e a simulação para a validação do processo de desenvolvimento do *Aedes aegypti*.

2. Redes de Petri

Muitos diagramas de modelagem são limitados para representar algumas características do sistema, pois apresentam somente uma visão parcial. Assim, várias notações gráficas podem ser usadas para representar um sistema como um meio de aumentar a precisão da informação. Para garantir que as especificações do software são consistentes, usa-se métodos formais.

A Rede de Petri (RdP) é uma linguagem de modelagem formal, criada por Carl Adam Petri, na Alemanha [Petri 1962], que permite representação gráfica e matemática, a análise dos modelos e fornece informações úteis sobre a estrutura e o comportamento dinâmico dos sistemas modelados.

A representação gráfica de uma RdP é representada por um grafo direcionado e bipartido, composto por dois nós: transição e lugar. A transição (t_i), representada por uma barra, é o componente ativo correspondente a alguma ação realizada dentro do sistema, e o lugar (p_i), representado por um círculo, é passivo e equivale a alguma variável de estado do sistema. Cada lugar pode conter um número inteiro de fichas, também conhecido como marcas ou *tokens*, representadas graficamente por círculos pretos dentro dos lugares, que podem mover-se ao longo dos arcos, de acordo com a ação executada (Figura 1).

Definição 1: Formalmente [Murata 1989], a rede de Petri é dada por uma quintupla: RdP = (P, T, F, W, M₀), onde:

- P = {p₁, p₂, ..., p_n} é um conjunto finito de lugares;
- T = {t₁, t₂, ..., t_n} é um conjunto finito de transições;

- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ define o conjunto de arcos, onde $(P \times T)$ representa o conjunto de arcos orientados de P_i para T_j (P_i, T_j), e $(T \times P)$ representa o conjunto dos arcos orientados de T_i para P_j (T_i, P_j);
- $W: F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ representa a função de pesos;
- $M_0: P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é a marcação inicial;
- $P \cap T = \emptyset$ e $P \cup T \neq \emptyset$; ou seja, os conjuntos P e T são disjuntos.

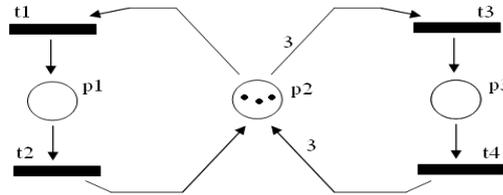


Figura 1. Exemplo de uma Rede de Petri.

Dentre as RdP de alto nível existentes, será utilizado neste artigo a Rede de Petri Predicado-Transição (RdPPT), com enfoque na Rede de Petri Predicado Transição Diferencial (RdPPTD), a qual combina características de um sistema dinâmico aos modelos discretos, permitindo que a simulação dos processos ecológicos seja representada de forma completa e intuitiva.

Na RdPPT a cada transição são associadas condições de disparo utilizando variáveis. Os lugares são chamados de predicados. As fichas passam a ser individualizadas, as variáveis associadas às fichas podem permitir ou não o disparo de uma transição [Cardoso e Valette 1997]. Assim, não somente a representação é mais precisa, mas o modelo permite estudar melhor as propriedades estruturais e comportamentais do sistema. A cada transição são atribuídas condições suplementares de disparo, que são escritas como fórmulas lógicas utilizando variáveis [Villani 2004]. Assim, uma transição t_i só pode ser disparada quando a condição associada a ela é satisfeita.

Das RdPPT foi proposto um formalismo que combinasse eventos discretos a eventos contínuos, surgindo assim as redes de Petri Predicado Transição Diferenciais [Champagnat 1998]. Para poder englobar esses modelos com equações diferenciais que possuem características contínuas de forma mais intuitiva e que as redes de Petri ordinárias não conseguem capturar, por abstrair apenas características discretas, adotam-se os modelos com redes de Petri Predicado Transição Diferenciais (RdPPTD).

Para cada configuração associa-se um conjunto de equações diferenciais que descrevem a evolução das variáveis contínuas. O vetor de variáveis indica o valor da ficha associado ao lugar. Com a chegada de uma ficha em um lugar, ativa-se o sistema de equações diferenciais associada àquele lugar, determinando a evolução de variáveis contínuas associadas àquele lugar [Tomiyaama 2007]. Com as transições são associadas funções de habilitação e funções de junção. As funções de habilitação (e_i) servem para habilitar o disparo da transição, de acordo com os valores das variáveis contínuas que se encontram nos lugares de entrada da transição. As funções de junção (j_i) modificam discretamente o valor das variáveis contínuas que se encontram nos lugares de saída da transição, logo após o disparo [Villani 2004], (ver exemplo na Figura 2).

As RdPPTD também permitem a modularidade, isto é, elas são capazes de se decompor em uma série de sub-redes, tornando a modelagem de sistemas complexos mais viáveis [Champagnat 1998]. Assim, sistemas de grande porte podem ser divididos em subsistemas para melhor representação, possibilitando a modelagem de processos ecológicos. A escolha das RdPPTD como formalismo para a modelagem de processos ecológicos permite que se viabilize o estudo da representação do ciclo de vida do mosquito

da dengue, cuja simulação apresenta aspectos dinâmicos e discretos, como será apresentado na próxima seção. As RdPPTD integram as vantagens das diversas abordagens existentes para a modelagem de processos ecológicos, como as equações diferenciais para a parte contínua e as redes de Petri para a parte discreta.

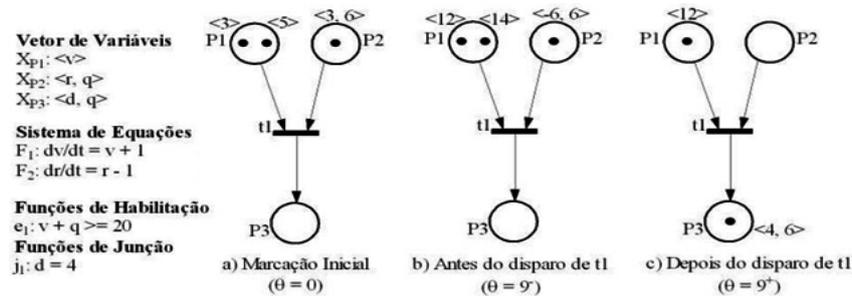


Figura 2. Exemplo de uma rede de Petri Predicado Transição Diferencial.

3. Ciclo de Vida do *Aedes aegypti*

A dengue é uma doença infecciosa causada por um vírus e é transmitida, no Brasil, através do mosquito *Aedes aegypti*, também infectado pelo vírus. A dengue é uma das principais doenças tropicais existente no mundo, motivando estudos no combate à doença e ao agente transmissor. A transmissão da doença ocorre pelo ciclo: mosquito infectado → homem susceptível → homem infectado → mosquito infectado. Após a ingestão de sangue infectado pelo inseto fêmea, ocorre na fêmea um período de incubação, tornando o mosquito apto a transmitir o vírus e assim permanece durante toda a vida [www.dengue.org.br].

O modelo representado neste trabalho considera as quatro fases de desenvolvimento do mosquito: ovo ($E(t)$), larva ($L(t)$), pupa ($P(t)$) e adulto ($W(t)$). Na natureza, o ciclo de vida do mosquito se completa em torno de 30 a 35 dias, o que pode variar muito dependendo das condições climáticas encontradas [Coutinho et al. 2004]. A quantidade de indivíduos em uma fase depende do número de indivíduos existentes na fase anterior, tornando-se um processo cíclico. Existe, portanto, uma taxa de transição entre as fases, indicando a taxa de sobrevivência de uma fase para outra, representadas nas equações pelos parâmetros $\sigma e(t)$ (ovo → larva), $\sigma l(t)$ (larva → pupa) e $\sigma p(t)$ (pupa → adulto.) A transição adulto para ovo é representada pela taxa de oviposição $\phi(t)$ (ato do inseto fêmea por ovos), que acontece após ela se alimentar de sangue e copula.

A mortalidade de cada fase é representada pelos parâmetros μe , μl , μp , e μw , indicando a taxa de mortalidade na fase ovo, larva, pupa e adulto, respectivamente. Tais parâmetros são funções de fatores externos, como a temperatura e a umidade. Além das taxas de metamorfose e mortalidade, que são parâmetros que dependem das variáveis climáticas, o modelo matemático permite a introdução de parâmetros sociais, tais como a capacidade total de criadouros C , as taxas de controle químico μ' , as taxas dependentes de controle mecânico m e a retirada de criadouros f .

3.1 Modelagem do Ciclo de Vida do *Aedes aegypti*

Muitos modelos matemáticos, baseados em uma linguagem de modelagem gráfica, têm sido abordados como meio de formalizar e permitir a compreensão de sistemas complexos. No contexto de processos ecológicos, verifica-se a ausência do emprego de tal formalismo, o que inviabiliza a representação de eventos contínuos e discretos.

Nesta seção, a primeira etapa consiste em definir um conjunto de equações diferenciais que de forma contínua corresponde a possíveis estados que podem ser assumidos durante as fases de metamorfose do mosquito, determinando o modelo

matemático. A segunda etapa consiste em produzir o modelo gráfico, através das RdPPTD, a fim de que sejam representadas de forma mais evidente e completa.

As seguintes equações diferenciais (3.1a – 3.1d) retratam as fases do ciclo de vida do *Aedes aegypti*. O primeiro termo desta equação (3.1a) deve-se à oviposição, que é responsável pelo surgimento dos ovos. O decréscimo do número de ovos é descrito pelos termos negativos (taxas de mortalidade e controle). A segunda equação (3.1b) descreve a quantidade de larvas a cada instante de tempo. As larvas aparecem devido à metamorfose dos ovos, primeiro termo da equação, e desaparecem devido à metamorfose para a fase de pupa e também à mortalidade causada por fatores naturais ou de controle. As equações seguintes (3.1c e 3.1d) seguem a mesma estrutura, combinando um termo de metamorfose da fase anterior (positivo) com os termos de desaparecimento (negativos).

$$\frac{dE}{dt} = \phi(t)W(t) \left[1 - \frac{E(t)}{(1-f)C} \right] - [\sigma_e(t) + \mu_e(t) + m_e(t)]E(t), \quad (3.1a)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sigma_e(t)E(t) - [\sigma_l(t) + \mu_l(t) + \mu'_l + m_l(t)]L(t), \quad (3.1b)$$

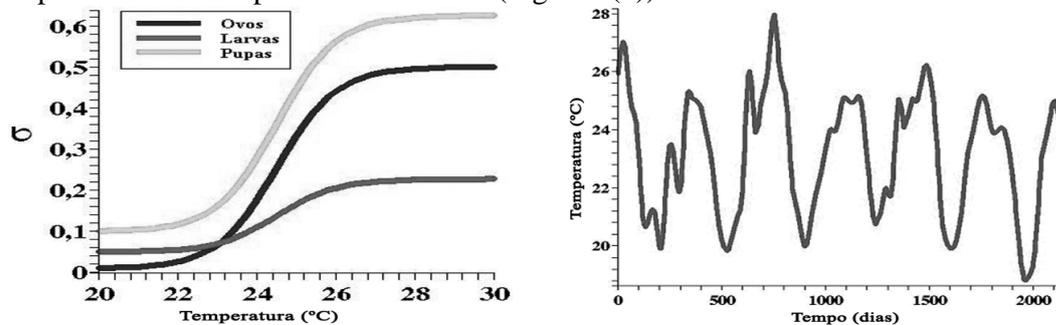
$$\frac{dP}{dt} = \sigma_l(t)L(t) - [\sigma_p(t) + \mu_p(t) + \mu'_p(t) + m_p(t)]P(t), \quad (3.1c)$$

$$\frac{dW}{dt} = \sigma_p(t)P(t) - [\mu_w(t) + \mu'_w(t)]W(t). \quad (3.1d)$$

Nesse modelo, levamos em conta a influência da temperatura nas taxas de metamorfose entre as fases, de tal modo que para temperaturas altas, as taxas de assumem valores altos, e vice e versa. Supomos a existência de uma temperatura de referência T_R . Para valores da temperatura muito maiores do que T_R , período favorável, σ tenderá para o valor σ_{sup} e para temperaturas muito menores do que T_R , período desfavorável, σ tenderá para σ_{inf} . Estas suposições são descritas por uma função do tipo sigmóide representando a influência da temperatura nas taxas de metamorfose do mosquito.

$$\sigma(t) = 0.5[(\sigma_{sup} - \sigma_{inf}) \tanh(\frac{T - T_R}{c}) + \sigma_{sup} + \sigma_{inf}] \quad (3.1e)$$

O parâmetro c é a taxa de variação de σ com a temperatura, onde temos uma variação brusca de σ com T para valores pequenos (ver Figura 3(a)). No modelo, σ está relacionado indiretamente ao tempo, já que as taxas de metamorfose dependem da temperatura, que varia diariamente e ao longo do ano. Por meio de uma interpolação, interligando um período de tempo com a variação da temperatura, consegue-se estabelecer a dependência da temperatura necessária (Figura 3(b)).



a) Taxas de transição (σ) entre os estágios de vida do mosquito em função da temperatura.

b) Simulação da temperatura em função do tempo.

Figura 3. Gráfico da população das fases em relação à temperatura em função do tempo.

O uso das equações diferenciais na modelagem de processos ecológicos é limitado por não considerar o caráter discreto dos processos. Portanto, as redes de Petri contribuem nesse aspecto, permitindo que a simulação, modelagem e análise dos processos ecológicos sejam representadas de forma mais integral, pois, graficamente, a visualização do processo como um todo é facilitada.

3.1 Modelagem da metamorfose do mosquito *Aedes aegypti* usando rede de Petri

Nesta seção, é apresentada a rede de Petri Predicado Transição Diferencial para a modelagem da metamorfose do mosquito da dengue (Figura 4).

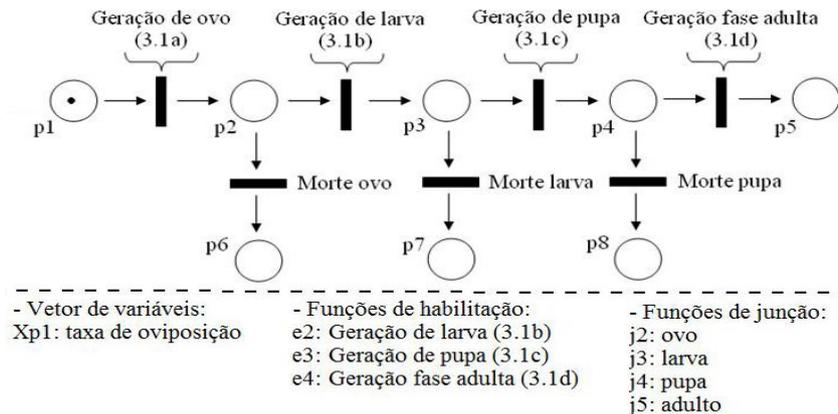


Figura 4. Rede de Petri Predicado Transição Diferencial para metamorfose do *Aedes aegypti*.

O vetor de variáveis $Xp1$ indica o valor da ficha associado ao lugar $p1$. As funções de habilitação $e2$, $e3$ e $e4$, indicam os valores das transições que satisfazem as equações nas fases de geração de larva, pupa e adulto, respectivamente. As funções de junção $j2$, $j3$, $j4$ e $j5$ indicam que as fases do ovo, larva, pupa e adulto, respectivamente, foram satisfeitas, ou seja, a ficha que inicialmente estava em $p1$ foi atualizada até chegar em $p5$.

A seguir é apresentado a sequência de disparos da rede de Petri da Figura 3 considerando que o ciclo de vida do mosquito termina na sua fase adulta:

- A marcação inicial (ficha que está associada ao lugar $p1$) sensibiliza a transição *Geração de ovo*, correspondente à equação (3.1a), a qual não possui pré-condição. O disparo da primeira transição indica que a fêmea depositou os ovos. Após o disparo, um novo estado é produzido, passando a ficha agora para $p2$.
- Com uma ficha no lugar $p2$, as transições *Geração de larva* e *Morte Ovo* estão sensibilizadas. Mas, somente a transição *Geração de larva* correspondente à equação (3.1b) é sensibilizada o que indica a passagem da fase ovo para larva. Após o disparo de *Geração de larva*, um novo estado é produzido, permanecendo a ficha agora em $p3$.
- Com uma ficha no lugar $p3$, as transições *Geração de pupa* e *Morte larva* são sensibilizadas. Mas somente a transição *Geração de pupa*, correspondente à equação (3.1c) é sensibilizada o que indica que a passagem da fase larva para pupa. Após o disparo de *Geração de pupa*, um novo estado é produzido, permanecendo a ficha agora em $p4$.
- Com uma ficha no lugar $p4$, as transições *Geração fase adulta*, e *Morte pupa* são sensibilizadas. Mas somente a transição *Geração fase adulta*, correspondente à equação (3.1d) é sensibilizada o que indica que a passagem da fase pupa para adulta. Após o disparo de *Geração fase adulta*, um novo estado é produzido, permanecendo a ficha agora em $p5$.

4. Resultados

Nesta simulação, levamos em conta a temperatura do ambiente como fator de mortalidade nas fases do mosquito, desconsiderando os controles químicos e mecânicos. A figura 4(a) mostra um resultado para uma simulação com os parâmetros da equação (3.1e) representada na figura 2(a) dados por:

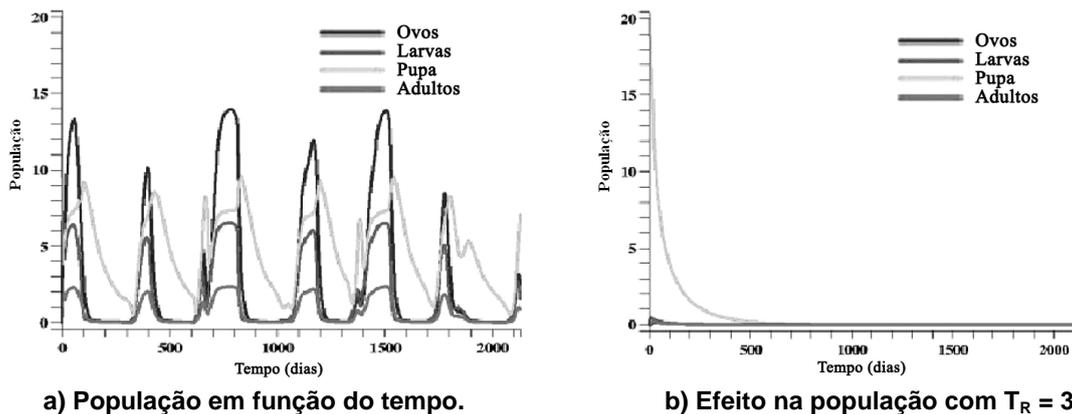
$\sigma_{\text{sup}} = 0.5$ e $\sigma_{\text{inf}} = 0.01$ para a transição ovo-larva;

$\sigma_{\text{sup}} = 0.227$ e $\sigma_{\text{inf}} = 0.05$ para a transição larva-pupa;

$\sigma_{\text{sup}} = 0.625$ e $\sigma_{\text{inf}} = 0.1$ para a transição pupa-adulto;

$c = 1,5$ e $T_R = 24,5^\circ\text{C}$.

As taxas de mortalidade assumem valores constantes $\mu_e = 1.0/100$, $\mu_l = 1.0/3$, $\mu_p = 1.0/200$ e $\mu_w = 1.0/9.5$. A taxa de oviposição f admite valor igual a 1 e C , capacidade total de criadouros, igual a 10. Há uma correlação direta entre a incidência de dengue e a temperatura. Para ilustrar a influência dos fatores ambientais no ciclo do mosquito, realizamos uma simulação em que as taxas de metamorfose são obtidas de novas equações com a mesma estrutura da equação (3.1e), mas tomando agora $T_R = 30$. Isto faz com que, para uma cidade onde os valores de temperatura durante o ano estão entre 20 e 28 graus estejam todos abaixo de T_R (Figura 5 (a)). Assim, os novos valores de taxas de metamorfose estarão em geral próximos dos limites inferiores σ_{inf} .



a) População em função do tempo.

b) Efeito na população com $T_R = 30$.

Figura 5. Gráficos da correlação entre a temperatura população de ovos, larvas, pupas e mosquitos em função do tempo.

Como nota-se na figura 5 (b), em que há uma alta taxa de temperatura, a população de mosquitos não consegue se estabelecer. O que fizemos nesta simulação foi elevar a temperatura necessária para o mosquito se instalar, tornando o ambiente desfavorável. Dessa forma, para cidades onde se predominam baixas temperaturas, há poucas incidências de casos de dengue.

Para a simulação da rede de Petri Predicado Transição Diferencial (Figura 4), a geração dos gráficos correspondentes às Figuras 3(a), 3(b), 5(a) e 5(b) foram geradas utilizando-se o software Maple 12 [MapleSoft].

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

Conclui-se, então, que para a modelagem de processos ecológicos seja aplicável, deve-se definir uma interface que permita maior flexibilidade, tanto da parte contínua quanto da discreta. Tentar incorporar em modelos discretos elementos que representam variáveis contínuas pode tornar o modelo inconsistente e complexo.

A rede de Petri Predicado Transição Diferencial foi capaz de promover uma interface que conservou os princípios iniciais: as redes de Petri e as equações diferenciais.

As RdPPTD são úteis na modelagem de processos ecológicos, como: a capacidade de representar de modo explícito os comportamentos paralelos, fornecendo uma visão gráfica como um todo; a capacidade de simular fichas, cada uma representando um cenário diferente; as evoluções das variáveis contínuas serem representadas por equações e capacidade de modular.

Como trabalhos futuros, serão adotados modelos que assumem diferentes rotas, pois a partir das RdPPTD é possível representar comportamentos paralelos, iterativos, alternativos, entre outros. E também, a construção de um software para simulação de processos ecológico-biológicos, utilizando a linguagem Java ou Matlab.

Referências

- Cardoso, J. e Valett, R. (1997). Redes de Petri. Ed. da UFSC, Florianópolis.
- Champagnat, R. (1998). Supervision des systemes discontinus: Definitions d'un modele hybride et pilotage en temps-reel, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse.
- Coutinho, F.A.B., Burattini, M.N., Lopez, L.F. e Massad, E. (2004). Threshold conditions for non-autonomous epidemic systems: Application to modelling Dengue overwintering, Escola de Medicina da Universidade de São Paulo.
- Ferreira, C.P. e YANG, H.M. (2003). Estudo Dinâmico da População de Mosquito *Aedes aegypti*, TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.vol. 4, no 2.
- Hestenes, D. (1987). Toward a modeling theory of physics instruction. Department of Physics, Arizona State University, Tempe, Arizona 85287, Am. J. Phys. 55 (5).
- Lana, R. M. (2006). Estudo da incidência de casos de dengue em Ipatinga através de um modelo matemático para o ciclo de vida do *Aedes aegypti* entre os anos de 1999 e 2004. Universidade Federal de Ouro Preto.
- MapleSoft. <http://www.maplesoft.com/>, em Agosto de 2011.
- Murata, T. (1989). Petri nets: properties, analysis and applications, Proceedings of the IEEE.
- Petri, C. A. (1962). Kommunikation mit Automaten, PhD Dissertation, Darmstadt University, Germany.
- Schreiber, K.V. (2001). An investigation of relationships between climate and dengue using a water budgeting technique. Department of Geography P.O.
- Site da dengue. <http://www.dengue.org.br/>, em Agosto de 2011.
- Smith, D.L., Dushoff, J. e McKenzie, F.E. (2004). The Risk of a Mosquito-Borne Infection in a Heterogeneous Environment, PLoS Biol 2.
- Tomiyama, M. N. (2007). Modelagem e Simulação de Processos Ecológicos usando Redes de Petri Predicado Transição Diferenciais. Universidade Federal de Uberlândia.
- Tran, A., Raffy and M. (2006). On the dynamics of dengue epidemics from large-scale information. Theoretical Population Biology 69, 3-12.
- Villani, E. (2004). Modelagem e análise de sistemas supervisórios híbridos. Universidade de São Paulo.
- Watts, D.M., Burke, D.S., Harrison, B., Whitmore, R.E. e Nisalak, A. (1987). Effect of temperature on the vector efficiency of *Aedes aegypti* for dengue 2 virus.